

Soluție

1.a) $2A_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(2A_2) = 12.$

b) $A_3 + xI_3 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_3) = (x+4)(x+1)^2. \det(A + xI_3) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -1\}.$

c) $\det A_4 = 5 \neq 0$, deci A_4 este inversabilă. Fie $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct se arată că

$$AB = BA = I_4, \text{ deci } B = A^{-1}.$$

2.a) $x_2 = 1+i \Rightarrow x_3 = 1-i$. Folosind relațiile lui Viete, obținem $a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ și $c = x_1x_2x_3$, adică $a = 4$, $b = 6$, $c = 4$.

b) Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ și $(X-2)^2$ sunt egale cu $r \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } r \leq 1$. Fie $g = f - r$; atunci $\text{grad } g = 3$. Atunci $(X-1)^2 \mid g$ și $(X-2)^2 \mid g$.

Rezultă $(X-1)^2(X-2)^2 \mid g \Rightarrow \text{grad } g \geq 4$, contradicție

c) Presupunem că $x_1 \leq 0$. Pe rând, rezultă $x_1^3 \leq 0$, $-ax_1^2 \leq 0$, $bx_1 \leq 0$, $-c < 0$. Adunând, obținem $0 = f(x_1) < 0$, contradicție.